

Universidade da Beira Interior

Cálculo I

Exame – 2ª (Eng. Civil)

Duração: 2h 15m

2009-02-09

- Escreva o seu **nome** e **número** em cada folha que entregar.
  - Não é permitido o uso de calculadora nem de qualquer formulário.
  - Apresente todos os cálculos que efectuar.
- 

1. [1,0] Determine o domínio e o contradomínio da função  $f(x) = \sqrt{x^2 - 4}$ .

2. [1,0] Calcule:  $\lim_{x \rightarrow 0^+} (\cos x)^{\frac{1}{x^2}}$

3. Considere a função:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{9-x}{3-\sqrt{x}} & \text{se } x < 9 \\ \frac{x}{9} + 5 & \text{se } x \geq 9 \end{cases}$$

- a) [1,0] Estude a continuidade de  $f$  no ponto  $x = 9$ .
- b) [1,0] Determine a equação da recta tangente ao gráfico de  $f$  para  $x = 1$ .

4. Considere a função:

$$f(x) = \frac{x^2}{x^2 + 3}$$

Determine:

- a) [0,5] Domínio e pontos de intersecção com os eixos.
- b) [0,5] Simetria.
- c) [0,5] Eventuais assíntotas.
- d) [1,0] Intervalos onde  $f(x)$  é crescente; intervalos onde  $f(x)$  é decrescente.
- e) [0,5] Eventuais pontos máximos e mínimos relativos de  $f(x)$ .
- f) [1,0] Sentido da concavidade de  $f(x)$ , em termos de intervalos.
- g) [0,5] Eventuais pontos de inflexão de  $f(x)$ .
- h) [0,5] Esboce o gráfico de  $f(x)$ .
- i) [1,0] Indique uma fórmula integral para o cálculo da área da região compreendida entre a função  $f(x)$ ,  $y = 1$ ,  $x = 0$  e  $x = 1$ . (Não calcule o integral.)

5. [1,5] Utilizando o cálculo integral, mostre que o volume de uma esfera de raio  $r$  é:

$$\frac{4}{3} \pi r^3.$$

6. Calcule:

a) [1,5]  $\int x^3 \sqrt{1+x^2} dx$ , considerando a substituição  $u = 1+x^2$

b) [1,5]  $\int_1^2 x^4 \ln x dx$  (Sugestão: aplique a integração por partes.)

c) [2,0]  $\int \frac{x^3 - 4x - 10}{x^2 - x - 6} dx$

7. [1,0] A série seguinte é absolutamente convergente, condicionalmente convergente ou divergente? Justifique.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt[4]{n}}$$

8. As séries seguintes convergem ou divergem? Justifique.

a) [1,0]  $\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{2^n}{n}$

b) [1,5]  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n)!}$