

Universidade da Beira Interior

Cálculo I

Exame – 1ª (Eng. Civil)

Duração: 2h 15m

2009-02-02

- Escreva o seu **nome** e **número** em cada folha que entregar.
 - Não é permitido o uso de calculadora nem de qualquer formulário.
 - Apresente todos os cálculos que efectuar.
-

1. Considere a função:

$$f(x) = \arctan(2x)$$

- a) [1,0] Determine o domínio e o contradomínio de f .
- b) [0,5] Determine a função inversa, $f^{-1}(x)$.

2. Calcule:

a) [1,0] $\lim_{x \rightarrow 0} x^2 \sin \frac{1}{x}$

b) [1,0] $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^x$

3. [1,0] Derivando implicitamente, calcule a primeira derivada, y' :

$$\sqrt{x+y} = 1 + x^2 y^2$$

4. Considere a função:

$$f(x) = x \ln x$$

Determine:

- a) [0,5] Domínio e pontos de intersecção com os eixos.
- b) [0,5] Simetria.
- c) [0,5] Eventuais assíptotas.
- d) [1,0] Intervalos onde $f(x)$ é crescente; intervalos onde $f(x)$ é decrescente.
- e) [0,5] Eventuais pontos máximos e mínimos relativos de $f(x)$.
- f) [1,0] Sentido da concavidade de $f(x)$, em termos de intervalos, e eventuais pontos de inflexão de $f(x)$.
- g) [0,5] Esboce o gráfico de $f(x)$.

5. Considere a região limitada pelas curvas

$$y = x^4, \quad y = 1.$$

a) [1,0] Calcule a área da região.

b) [1,5] Suponha que a região é rodada em torno do eixo $y = 2$. Calcule o volume do sólido resultante.

6. Calcule:

a) [1,5] $\int \frac{x}{\sqrt{1-x}} dx$, considerando a substituição $u = 1-x$

b) [1,5] $\int_0^1 \frac{x-1}{x^2+3x+2} dx$

c) [2,0] $\int e^{-x} \cos x dx$ (Sugestão: aplique a integração por partes 2 vezes.)

7. [1,0] Qual é o valor da seguinte soma? Justifique.

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \dots$$

8. As séries seguintes convergem ou divergem? Justifique.

a) [1,0] $\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{n}{n^2+25}$

b) [1,5] $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}$